Oraux ; Série N°5

Exercice 1 Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $f(x,y) = (x+y-2)^2 + (2x-y)^2 + (x+1)^2$. En interprétant $f(x,y)$ comme la distance au carré entre un vecteur $Z \in \mathbb{R}^3$ qui dépend de x, y et un vecteur constant, déterminer le minimum de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 [CCP MP] Soient $a, b \in \mathbb{R}$ distincts, $n \in \mathbb{N}$, et $u \colon P \in \mathbb{C}_n[X] \mapsto (X-a)(X-b)P' - nXP$.

1. Montrer que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_n[X])$.
2. Pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$, donner la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.
3. Résoudre, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, l'équation $u(P) = \lambda P$.
4. Expliciter une base de $\mathbb{C}_n[X]$ dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Ind : *3. L'équation implique que les seules racines de P sont a et b. Déterminer les λ pour lesquelles il existe une solution non nulle.*

Exercice 3 Soit $n \geq 2$. Le joueur A lance $6n$ dés et gagne s'il a au moins n fois la face 6. Le joueur B lance $6(n+1)$ dés et gagne s'il a au moins $n+1$ fois la face 6. On cherche quel joueur a le plus de chance de gagner. On note X_n le nombre de 6 obtenu par B lors des $6n$ premiers lancers, et Y le nombre de 6 dans les 6 derniers lancers.

1. Lois de X_n et de Y.
2. Montrer que $P(X_{n+1} \geq n+1) = P(X_n \geq n+1) + \sum_{r=1}^{6} P(X_n = n+1-r)P(Y \geq r)$.
3. Que vaut $\sum_{r=1}^{6} P(Y \geq r)$?
4. Montrer que $\max\left\{P(X_n = j),\, j \in [\![0, 6n]\!]\right\} = P(X_n = n)$. Conclure.

Exercice 4 [Navale MP]

1. Pour $m > 1$, montrer qu'il existe un unique $x_m \in]-1, -2[$, tel que $m \ln\left(1 + \frac{x_m}{m+1}\right) = x_m$.
2. Étudier la suite $(x_m)_{m \geq 2}$.

Exercice 5 [Mines] Soit E l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que pour tout $f \in E$, $\int_0^1 |f' - f| \geq e^{-1}$. La constante e^{-1} est-elle optimale ? **Ind** : *On pose $g = f' - f$, rappeler une expression explicite de f en fonction de g.*

Exercice 6 [X] Soit $r \in \mathbb{Q}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = 2\cos(2^n \pi r)$.

1. Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique APCR.
2. Expliciter une relation de récurrence vérifiée par (a_n).
3. On suppose que $\cos(\pi r) \in \mathbb{Q}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in \mathbb{Z}$. En déduire les valeurs possibles de r.
4. Vérifier que $\mathbb{Q}[i]$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.
5. Déterminer les éléments d'ordre fini du groupe multiplicatif de $\mathbb{Q}[i]$.

Exercice 7 [ENS 2023]

1. CNS sur n pour que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit un corps.
2. Combien y a-t-il de polynômes de degré $d \in \mathbb{N}$ fixé dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[X]$?
3. Soit p premier. Montrer qu'il existe des polynômes irréductibles de degré 2 et 3 dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 8 [ENS 2023] Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ et $S \subset [\![1, n]\!]$ non vide tels que $\left|m - \sum_{i \in S} x_i\right| \leq \frac{1}{n+1}$.

Oraux ; Série N°5

Exercice 1 Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $f(x,y) = (x+y-2)^2 + (2x-y)^2 + (x+1)^2$. En interprétant $f(x,y)$ comme la distance au carré entre un vecteur $Z \in \mathbb{R}^3$ qui dépend de x, y et un vecteur constant, déterminer le minimum de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 [CCP MP] Soient $a, b \in \mathbb{R}$ distincts, $n \in \mathbb{N}$, et $u \colon P \in \mathbb{C}_n[X] \mapsto (X-a)(X-b)P' - nXP$.

1. Montrer que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_n[X])$.
2. Pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$, donner la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.
3. Résoudre, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, l'équation $u(P) = \lambda P$.
4. Expliciter une base de $\mathbb{C}_n[X]$ dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Ind : *3. L'équation implique que les seules racines de P sont a et b. Déterminer les λ pour lesquelles il existe une solution non nulle.*

Exercice 3 Soit $n \geq 2$. Le joueur A lance $6n$ dés et gagne s'il a au moins n fois la face 6. Le joueur B lance $6(n+1)$ dés et gagne s'il a au moins $n+1$ fois la face 6. On cherche quel joueur a le plus de chance de gagner. On note X_n le nombre de 6 obtenu par B lors des $6n$ premiers lancers, et Y le nombre de 6 dans les 6 derniers lancers.

1. Lois de X_n et de Y.
2. Montrer que $P(X_{n+1} \geq n+1) = P(X_n \geq n+1) + \sum_{r=1}^{6} P(X_n = n+1-r)P(Y \geq r)$.
3. Que vaut $\sum_{r=1}^{6} P(Y \geq r)$?
4. Montrer que $\max\left\{P(X_n = j),\, j \in [\![0, 6n]\!]\right\} = P(X_n = n)$. Conclure.

Exercice 4 [Navale MP]

1. Pour $m > 1$, montrer qu'il existe un unique $x_m \in]-1, -2[$, tel que $m \ln\left(1 + \frac{x_m}{m+1}\right) = x_m$.
2. Étudier la suite $(x_m)_{m \geq 2}$.

Exercice 5 [Mines] Soit E l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que pour tout $f \in E$, $\int_0^1 |f' - f| \geq e^{-1}$. La constante e^{-1} est-elle optimale ? **Ind** : *On pose $g = f' - f$, rappeler une expression explicite de f en fonction de g.*

Exercice 6 [X] Soit $r \in \mathbb{Q}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = 2\cos(2^n \pi r)$.

1. Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique APCR.
2. Expliciter une relation de récurrence vérifiée par (a_n).
3. On suppose que $\cos(\pi r) \in \mathbb{Q}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in \mathbb{Z}$. En déduire les valeurs possibles de r.
4. Vérifier que $\mathbb{Q}[i]$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.
5. Déterminer les éléments d'ordre fini du groupe multiplicatif de $\mathbb{Q}[i]$.

Exercice 7 [ENS 2023]

1. CNS sur n pour que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit un corps.
2. Combien y a-t-il de polynômes de degré $d \in \mathbb{N}$ fixé dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[X]$?
3. Soit p premier. Montrer qu'il existe des polynômes irréductibles de degré 2 et 3 dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 8 [ENS 2023] Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ et $S \subset [\![1, n]\!]$ non vide tels que $\left|m - \sum_{i \in S} x_i\right| \leq \frac{1}{n+1}$.